Abschätzungen bei unsymmetrischen Gitterpunktproblemen

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Peter Georg Schmidt
aus Duisburg

Göttingen 1964

Fotodruck von Erich Mauersberger in Marburg

Abschätzungen bei unsymmetrischen Gitterpunktproblemen

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Peter Georg Schmidt
aus Duisburg

Göttingen 1964

Fotodruck von Erich Mauersberger in Marburg

D 7

Referent: Professor Dr. M. Deuring
Korreferent: Professor Dr. H. Grauert

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Juli 1964

Einleitung

Bei der Behandlung gewisser unsymmetrischer Gitterpunktprobleme - vgl. die Sätze 4 und 6, S.37 - spielt die in t gleichmäßige Abschätzung der Summe

$$S := \sum_{t<n\leq x^{1/3}} \left(\frac{x}{n^2} - \left[\frac{x}{n^2}\right] - \frac{1}{2}\right) \qquad (x \geq 1,\ t \geq 0)$$

eine besondere Rolle. H.E. Richert [1]) führt die Abschätzung von S auf die Abschätzung eindimensionaler Exponentialsummen zurück und erhält mit Hilfe der van der Corputschen "Theorie der Exponentenpaare" [2]) das Resultat [3])

$$S \ll x^{2/9} \log x.$$

Durch geschickte Wahl der bei Richert [4]) auftretenden "Exponentenpaare" konnte R.A. Rankin [5]) dieses Resultat zu

$$S \ll x^{\vartheta_2} \qquad \text{mit} \qquad \vartheta_2 := 0,\ 2219\ 8215\ \ldots < 2/9$$

verbessern. Gleichzeitig zeigte er, daß der von Richert eingeschlagene Weg kein $\vartheta_2 \leq 0,\ 2219\ 8215$ liefern kann [6]).

In der Literatur wurde bisher keine Verschärfung der Richert-Rankinschen Abschätzung veröffentlicht.

Im Beweise von Satz 2, S.28-32, reduzieren wir - zunächst unter der Voraussetzung $t \geq x^{2/7}$ - die Abschätzung von S auf die Abschätzung zweidimensionaler Exponentialsummen der Form (8';S.9).

Im Beweise von Satz 1, S.9-27, beseitigen wir durch einen ersten "van der Corputschen Schritt" bezüglich n - vgl. Hilfssatz 4, S.5 - die n_1 - Linearität der in (8') auftretenden Funktion xn_1n^{-2} und führen damit unser Problem auf die Abschät-

---

[1]) Vgl. [5]. Das Literaturverzeichnis steht auf Seite 40.
[2]) Vgl. [3].
[3]) Vgl. [5], Formel (22), S.28. An der Herleitung erkennt man, daß [5], (22) auch für das Summationsintervall $(t, x^{1/3}>$ gilt.
[4]) Vgl. [5], Lemma 8, S.26.
[5]) Vgl. [4]) und [4], (VI), S.152-153.
[6]) Man verwende in [4],(VI) die untere Abschätzung [4],(4),S.150.

zung der Exponentialdoppelsumme S_6 (29,S.12) zurück. Nach zwei vorbereitenden "Weylschen Schritten" - vgl. Hilfssatz 2, S.4 - bezüglich der in S_6 auftretenden Summationsvariablen n_2 folgt dann ein weiterer van der Corputscher Schritt bezüglich n_2. Würde man nun die verbleibende Exponentialdoppelsumme trivial abschätzen oder fortfahren, Weylsche und van der Corputsche Schritte bezüglich n_2 durchzuführen, so erhielte man im ersten Falle das Richertsche, im zweiten (je nach Schrittfolge) höchstens das Rankinsche Ergebnis. Wir werden daher in der verbleibenden Exponentialdoppelsumme zuerst über die andere Summationsvariable n_1 summieren, und auf die innere Summe S_9 (82, S.21) die van der Corputsche Theorie der Exponentenpaare anwenden.

Schließlich befreien wir uns vermöge Hilfssatz 12, S.8, von der in Satz 2, S.28, gemachten Voraussetzung $t \geq x^{2/7}$ und erhalten Satz 3, S.33, dessen numerische Auswertung unseren Hauptsatz, S.36,

$$S \ll x^{\vartheta_1} \qquad \text{mit} \qquad \vartheta_1 := \frac{109\ 556}{494\ 419} < 0,\ 2215\ 8534,$$

liefert. Definiert man im Hinblick auf die Ergebnisse von Richert und Rankin Θ durch $\vartheta_2 = 2/9 - \Theta$, so ist $\vartheta_1 < 2/9 - 2{,}65 \cdot \Theta$, unser Hauptsatz also eine Verbesserung des Rankinschen Resultats.

Aus unserem Hauptsatz folgen nun die eingangs erwähnten Gitterpunktabschätzungen. Das in Satz 4, S.37, behandelte Problem könnte man auch "quadratisches Teilerproblem" nennen. Satz 6, S.37, resultiert aus Satz 4 [1]; wir ziehen jedoch eine direkte Herleitung aus unserem Hauptsatz vor.

Aus Satz 4 folgt noch eine verschärfte [2] Abschätzung der summatorischen Funktion der Anzahl wesentlich verschiedener abelscher Gruppen gegebener Ordnung (Satz 5, S.37), und aus Satz 6 folgt eine verschärfte [3] Abschätzung des Abstandes aufeinander-

---

[1] Vgl. [7], Abschnitt 5, S.18-19.
[2] [4], (V), ist das bisher beste Resultat.
[3] [4],(VI), " " " " " .

folgender quadratfreier Zahlen (Satz 7, S.39).

Die in den Sätzen 4 und 6, S.37, behandelten Gitterpunktprobleme heißen "unsymmetrisch", weil die dort auftretenden Summationsbedingungen unsymmetrisch in m und n sind. Diese Unsymmetrie überträgt sich auf die in S_6, S.12, vorkommende Funktion $c_2(xn_1n_2^2)^{1/3}$. Bei symmetrischen Gitterpunktproblemen, etwa beim Kreis- und Teilerproblem [1], ist die entsprechende Funktion symmetrisch in n_1 und n_2. Daher waren dort "Weylsche Schritte bezüglich n_1 und n_2" [2] erfolgreich. Bei der Abschätzung von S_6 scheint jedoch die Ersetzung der von uns verwendeten Weylschen Schritte durch die eben genannten keine Verbesserung unserer Resultate zu liefern, da man dann zur Erzielung möglichst günstiger Abschätzungen zwei der auftretenden vier Parameter so zu wählen hätte, nämlich = 1, daß die Anwendung von [6], Hilfssatz 2, doch auf eine Anwendung unseres Hilfssatzes 2 hinauslaufen würde.

Abkürzungen und Vereinbarungen

Stets sei $x \geq 1$ und $\Psi(u) := u - [u] - 1/2$ für reelle u.

Leere Summen mögen den Wert 0, leere Produkte den Wert 1 haben.

Die Summationsbedingung $a,b \leq n \leq c,d$ sei gleichbedeutend mit $\max(a,b) \leq n \leq \min(c,d)$.

"ld" sei der "Logarithmus dualis".

Die in den Sätzen und zugehörigen Beweisen auftretenden O- bzw. $\ll$ -Konstanten hängen, sofern nichts anderes gesagt ist, nur von denjenigen Parametern ab, die in den zugehörigen Voraussetzungen als "beliebig aber fest" bezeichnet werden.

Formel (n) aus §m wird in §m durch (n) zitiert, in anderen Paragraphen durch (m.n).

---

[1]) Vgl. die in [4], S.153, zitierte Literatur.
[2]) Vgl. [6], Hilfssatz 2.

§ 1. Hilfsmittel

Hilfssatz 1 [1] ("partielle Summation")

Sind für $m = a, a+1, \ldots, b$ die positiven v_m monoton mit m und $\ll V$ und die w_m beliebig komplex, so gilt

$$\sum_{m=a}^{b} v_m w_m \ll V \max_{a \leq b' \leq b} \left| \sum_{m=a}^{b'} w_m \right|.$$

Hilfssatz 2 [2] ("Weylscher Schritt")

Die reelle Funktion $h(n_1,n_2)$ sei definiert im Bereich

$$G \subseteq R := \{(n_1,n_2) : n_j \in \langle N_j, N_j' \rangle \; ; \; j = 1, 2\}. \tag{1}$$

Ist dann

$$1 \leq \varrho \leq N_2' - N_2, \tag{2}$$

so gilt

$$\sum_{(n_1,n_2)\in G} \sum e(h(n_1,n_2)) \ll \varrho^{-1/2}(N_1' - N_1 + 1)(N_2' - N_2 + 1) + \{\varrho^{-1}(N_1' - N_1 + 1)(N_2' - N_2 + 1) \sum_{1 \leq p \leq \varrho - 1} \left| \sum_{\substack{(n_1,n_2)\in G \\ (n_1,n_2+p)\in G}} \sum e(h(n_1,n_2+p) - h(n_1,n_2)) \right| \}^{1/2}. \tag{3}$$

Hilfssatz 3 [3]

Es sei

$$Q \text{ ganz} \geq 3, \tag{4}$$

$$0 < m_1 < m_2, \tag{5}$$

$f(m)$ im Intervall $\langle m_1, m_2 \rangle$ reell und Q-mal differenzierbar,

$$f''(m) < 0, \tag{6}$$

$$\mu_1 := f'(m_2), \tag{7}$$

$$\mu_2 := f'(m_1), \tag{8}$$

---

[1]) Vgl. [8], 5.2, S. 82.

[2]) Vgl. [6], Hilfssatz 1, und die dort im Anschluß an Hilfssatz 2 gemachte Bemerkung.

[3]) Vgl. [1], Hilfssatz 7.

so daß $\mu_1 < \mu_2$ ist und zu jedem $\mu \in \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ die streng monoton von m_2 nach m_1 fallende Funktion $m(\mu)$ eindeutig bestimmt ist durch die Beziehung

$$f'(m(\mu)) = \mu. \tag{9}$$

Es werde

$$\Phi(\mu) := \mu m(\mu) - f(m(\mu)) \tag{10}$$

gesetzt. Ferner sei $0 < \gamma < 1/2$,

$$s > 0, \quad y > 0, \tag{11}$$

$$\sigma := 1/s, \quad \eta := y^{\sigma}. \tag{12}$$

Dann gibt es eine positive, nur von Q, γ und s abhängige Zahl $c < 1/2$ derart, daß aus

$$\begin{aligned} |f^{(q+1)}(m) - (-1)^q ys(s+1)\cdots(s+q-1)m^{-s-q}| \quad & {}^{1)} \\ < cys(s+1)\cdots(s+q-1)m^{-s-q}, & \end{aligned} \tag{13}$$

gültig für alle $m \in \langle m_1, m_2 \rangle$ und alle $q = 0,1,\ldots,Q-1$, folgt, daß im Intervall $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ auch $\Phi(\mu)$ Q-mal differenzierbar ist und für $q = 0,1,\ldots,Q-1$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |\Phi^{(q+1)}(\mu) - (-1)^q \eta\sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+q-1)\mu^{-\sigma-q}| \\ < \gamma\eta\sigma(\sigma+1)\cdots(\sigma+q-1)\mu^{-\sigma-q} \end{aligned} \tag{14}$$

erfüllt.

Hilfssatz 4 [2] ("van der Corputscher Schritt")

Es sei

$h(n)$ im Intervall $\langle a,b \rangle$ reell und viermal stetig differenzierbar, $H_2 \ll -h''(n) \ll H_2$, $h^{(j)}(n) \ll H_j$ für $j = 3, 4$ und $H_3^2 = H_2 H_4$. (15)

Ist dann

$\alpha := h'(b)$, $\beta := h'(a)$ und $n(\nu) \in \langle a,b \rangle$ für $\nu \in \langle \alpha, \beta \rangle$ durch $h'(n(\nu)) = \nu$ definiert, (16)

so gilt

$$\sum_{a \le n \le b} e(h(n)) = e(-1/8) \sum_{\alpha \le \nu \le \beta} \frac{e(h(n(\nu)) - \nu n(\nu))}{|h''(n(\nu))|^{1/2}} + \tag{17}$$

---

[1]) Für $q = 0$ sei $s(s+1)\cdots(s+q-1)$ als leeres Produkt $= 1$.

[2]) Vgl. [3], Lemma 3.

$$+ O(H_2^{-1/2}) + O(\log\{2 + (b - a)H_2\}) + O((b - a)H_3^{1/3}). \qquad (17)$$

Bemerkung: Wegen des logarithmischen Fehlergliedes bleibt die Behauptung richtig, wenn links nur über $a < n \leqslant b$ summiert wird.

Hilfssatz 5 [1]

Ist $h(n)$ im Intervall $\langle a,b\rangle$ reell und zweimal differenzierbar,

$$0 < H_2 \ll -h''(n) \text{ in } \langle a,b\rangle, \qquad (18)$$

$$h'(a) - h'(b) < 2, \qquad (19)$$

so gilt

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b} e(h(n)) \ll 1 + H_2^{-1/2}.$$

Definition 1 [2]

Das Paar reeller Zahlen (κ,λ) heißt ein Exponentenpaar, wenn

$$0 \leqslant \kappa \leqslant 1/2, \quad 1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1 \qquad (20)$$

ist und es zu jeder positiven Zahl d zwei nur von κ, λ und d abhängige Zahlen Q und ε (Q ganz $\geqslant 5$, $0 < \varepsilon < 1/2$) gibt, so daß stets die Abschätzung

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b} e(h(n)) \ll z^{\kappa} a^{\lambda} \qquad (21)$$

mit nur von κ, λ und d abhängiger $\ll$-Konstanten gilt, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$1 \leqslant a \leqslant b \ll a, \qquad (22)$$

$$Y > 0, \qquad (23)$$

$$z := Ya^{-d} > 1, \qquad (24)$$

$h(n)$ ist im Intervall $\langle a,b\rangle$ definiert, reell, Q-mal differenzierbar, und für $n \in \langle a,b\rangle$, $q = 0,1,\ldots,Q-1$ ist

$$|h^{(q+1)}(n) - (-1)^q Yd(d+1)\cdots(d+q-1)n^{-d-q}| < \varepsilon Yd(d+1)\cdots(d+q-1)n^{-d-q}. \qquad (25)$$

---

[1]) Vgl. [1], Hilfssatz 3.

[2]) Vgl. [3], Definition, S. 214.

A und B seien die projektiven Abbildungen

$$(\kappa,\lambda) \to A(\kappa,\lambda) := \left(\frac{\kappa}{2(1+\kappa)}, \frac{1+\kappa+\lambda}{2(1+\kappa)}\right), \tag{26}$$

$$(\kappa,\lambda) \to B(\kappa,\lambda) := (\lambda - 1/2, \kappa + 1/2). \tag{27}$$

Unter $BA(\kappa,\lambda)$ verstehen wir:

$$B(A(\kappa,\lambda)) = \left(\frac{\lambda}{2(1+\kappa)}, \frac{1+2\kappa}{2(1+\kappa)}\right); \tag{28}$$

entsprechend werden Ausdrücke der Form (29) erklärt.

Hilfssatz 6 [1]

Ist (κ,λ) ein Exponentenpaar, so auch $A(\kappa,\lambda)$.

Hilfssatz 7 [2]

Ist (κ,λ) ein Exponentenpaar, so auch $BA(\kappa,\lambda)$.

Definition 2

(κ,λ) heißt Grundexponentenpaar, wenn

$(\kappa,\lambda) = (0,1)$ oder $(\kappa,\lambda) = (1/2,1/2)$ oder

$$(\kappa,\lambda) = A^{s_0}BA^{s_1}BA^{s_2}\cdots BA^{s_n}(1/6,2/3) \tag{29}$$

gilt mit $n \geqslant 0$, $s_0 \geqslant 0$ [3] und $s_1, s_2, s_3, \ldots \geqslant 1$.

Hilfssatz 8

Jedes Grundexponentenpaar ist ein Exponentenpaar.

Beweis:

$(0,1)$ ist ein Exponentenpaar; denn stets gilt unter der Voraussetzung (22) die Abschätzung

$$\left|\sum_{a\leqslant n\leqslant b} e(h(n))\right| \leqslant b - a + 1 \ll z^0a^1.$$

Weiter folgt durch wiederholte Anwendung der Hilfssätze 6 und 7: Mit $(0,1)$ sind auch $BA(0,1) = (1/2,1/2)$, $A(1/2,1/2) = (1/6,2/3)$ und somit alle Zahlpaare (29) Exponentenpaare.

---

[1]) Vgl. [3], Theorem 1.

[2]) Vgl. [3], Theorem 4 für $q = 1$.

[3]) A^0 sei die identische Abbildung.

Da B involutorisch ist und die Grundexponentenpaare (0,1), (1/2,1/2) und (1/6,2/3) untereinander permutiert, folgt unmittelbar aus Definition 2:

Hilfssatz 9

Ist (κ,λ) ein Grundexponentenpaar, so auch $B(\kappa,\lambda)$.

Setzt man in [5], Lemma 8, $\alpha := 1/3$, $\beta := \gamma := 1/2$ und - vgl. (26) und (28) - $(k,l) := BA^2(1/6,2/3) = BA(1/14, 11/14) = (11/30, 16/30)$, so erhält man wegen Hilfssatz 8:

Hilfssatz 10 [1]

$$\sum_{1\leq n\leq x^{1/3}} \psi(\sqrt{x/n}) \ll x^{9/41}.$$

Setzt man in [5], Lemma 3, $\varrho := 2$, so ergibt sich wegen Hilfssatz 10 mit

$$S(\xi_1,\xi_2) := \sum_{\xi_1<n\leq\xi_2} \psi(x/n^2) \qquad (\xi_1 \geq 0): \tag{30}$$

Hilfssatz 11

$$\sum_{mn^2\leq x}\sum 1 = \zeta(2)x + \zeta(1/2)x^{1/2} - S(0,x^{1/3}) + O(x^{9/41}).$$

Hilfssatz 12

Ist $0 \leq \xi \leq x^{1/3}$ [1] und (κ,λ) ein "beliebiges aber festes" Exponentenpaar mit $1/5 \leq \kappa < \lambda/2$, so gilt

$$S(0,\xi) = \sum_{0<n\leq\xi} \psi(x/n^2) \ll (x^{\kappa}\xi^{\lambda-2\kappa})^{1/(1+\kappa)}. \tag{31}$$

Beweis:
Wegen Fußnote [1] sei $x \geq 2$ und $\xi > 1$. In [5], Lemma 8, setzen wir $\beta := 1$, $\gamma := 2$ und α so, daß $x^{\alpha} = \xi$ gilt. Dann ist $0 < \alpha \leq 1/3$ und wegen $\kappa \geq 1/5$: $\alpha - (\beta - \alpha\gamma)/2 = 2\alpha - 1/2 \leq 1/6 \leq \kappa/(1+\kappa)$. Hilfssatz 12 folgt also wegen $\lambda > 2\kappa$ aus [5], Lemma 8.

---

[1] Für $1 \leq x < 2$ ist der Hilfssatz trivial, ebenso Hilfssatz 12 für $0 \leq \xi \leq 1$.

§ 2. Der Hauptsatz

Satz 1

Es sei

$$1 \leq M_1 \leq N_1 \leq x, \tag{1}$$

$$N_1 \leq N_1' \leq N_1 + M_1, \tag{2}$$

$$N < N' \leq 2N, \tag{3}$$

$$x^{2/7} \leq N \leq x^{1/3}, \tag{4}$$

$$M_1 \leq (x^{-2}N^9)^{2/17}, \tag{5}$$

$$c_0 = 1/100. \tag{6}$$

Ist dann (k,l) ein "beliebiges aber festes" Grundexponentenpaar mit $l \leq 2k$, (7)
so folgt

$$S_1(N_1,N_1') := \sum_{N_1 \leq n_1 \leq N_1'} \sum_{N < n \leq N'} e(xn_1n^{-2}) \tag{8'}$$

$$\ll M_1^{c_0} N_1^{1-c_0} (x^{1+2l} M_1^{1+l+k} N^{-1-2l})^{1/(4+6l)}. \tag{8}$$

Wir gliedern den Beweis in vierzehn Abschnitte:

I. $c_1, c_2, \ldots, c_7$ seien wie c_0 geeignete positive Konstanten. (k,l) ist laut Hilfssatz 8 ein Exponentenpaar. Daher gilt wegen (1.20) und (7)

$$1/2 \leq l \leq 2k. \tag{9}$$

Aus (4) ergibt sich

$$xN^{-1} \geq x^{2/3} \geq 1. \tag{10}$$

Aus (1), (6) und (9 - 10) folgt sofort, daß die rechte Seite in (8) stets ≥ 1 ist. Daher dürfen wir x größer als eine gewisse, nur von k und l abhängige Zahl x_0 annehmen:

$$x > x_0 \geq 1; \tag{11}$$

denn nach (1 - 4) ist mit x auch $S_1(N_1,N_1') \ll 1$.

II. Wir schicken einige Abschätzungen für

$$r := (M_1/N_1)^{1-2c_0} (x^{1+l} M_1^{1+2l} N^{-k-3-4l})^{1/(2+3l)} \tag{12}$$

voraus. Wegen $M_1 \geqslant 1$ und (9) folgt

$$r \leqslant (M_1/N_1)^{1-2c_0}(x^{1+l}\, M_1^{1+3l/2}\, N^{-3-4l})^{1/(2+3l)}$$

$$= (M_1/N_1)^{1-2c_0}(xM_1N^{-3})^{1/2}(xN^{-1})^{-1/(4+6l)}.$$

Da $-1/(4+6l)$ monoton mit l fällt, gilt wegen (10) und $l \geqslant 1/2$ weiter

$$r \leqslant (M_1/N_1)^{1-2c_0}(xM_1N^{-3})^{1/2}(xN^{-1})^{-1/14}.$$

Hieraus ergibt sich wegen (1), (6) und (10)

$$r \leqslant x^{3/7}\, N_1^{-1+2c_0} M_1^{3/2}\, N^{-10/7}, \tag{13}$$

$$r \leqslant (x\, M_1N^{-3})^{1/2} x^{-1/21} \leqslant (x\, N_1N^{-3})^{1/2}\, x^{-c_1/2}. \tag{14}$$

III. Es sei n_1 ein fester Wert des Intervalls $\langle N_1, N_1' \rangle$. (15)
Wir wenden Hilfssatz 4 auf

$$\overline{S}_2(n_1) := \sum_{N<n\leqslant N'} e(-xn_1n^{-2}) \qquad ^{1}) \tag{16}$$

an, indem wir dort

$$h(n) := -xn_1n^{-2}, \tag{17}$$

$$\langle a,b\rangle := \langle N, N'\rangle \tag{18}$$

setzen. Wegen (1 - 3), (15) und (17 - 18) sind mit

$$H_q := x\, N_1N^{-2-q} \qquad (q = 2, 3, 4) \tag{19}$$

die Voraussetzungen (1.15) sämtlich erfüllt. Daher gilt [2]), wenn wir gemäß (1.16) die Funktion $n(n_2)$ - wir schreiben n_2 statt ν - im Intervall

$$\langle N_2(n_1), N_2^*(n_1)\rangle := \langle h'(b), h'(a)\rangle = \langle 2xn_1N'^{-3}, 2xn_1N^{-3}\rangle \tag{20}$$

durch

$$h'(n(n_2)) = n_2 \quad \text{oder} \quad 2xn_1n^{-3}(n_2) = n_2 \quad \text{oder}$$

$$n(n_2) = (2xn_1n_2^{-1})^{1/3}$$

definieren, wegen (3), (16 - 19),

---

1) Der Querstrich bezeichne das konjugiert Komplexe.
2) Man beachte die Bemerkung zu Hilfssatz 4.

$$h(n(n_2)) - n_2 n(n_2) = -xn_1(2xn_1n_2^{-1})^{-2/3} - n_2(2xn_1n_2^{-1})^{1/3}$$
$$= -c_2(xn_1n_2^2)^{1/3}$$

und

$$|h''(n(n_2))|^{-1/2} = |-6xn_1(2xn_1n_2^{-1})^{-4/3}|^{-1/2}$$
$$= c_3(xn_1)^{1/6}n_2^{-2/3}$$

$$\bar{S}_2(n_1) = c_3 e(-1/8) \sum_{N_2(n_1) \le n_2 \le N_2^*(n_1)} (xn_1)^{1/6} n_2^{-2/3} \cdot \cdot e(-c_2(xn_1n_2^2)^{1/3}) \quad (21)$$
$$+ O((x N_1)^{-1/2} N^2) + O(\log(2+x N_1 N^{-3})) + O((x N_1 N^{-2})^{1/3}).$$

Das logarithmische Fehlerglied wird durch das erste oder letzte majorisiert, jenachdem ob $x N_1 N^{-2} <$ oder $\geqslant 1$ ist.

IV. Summieren wir (21) über alle ganzen $n_1 \in \langle N_1, N_1' \rangle$ und gehen zum konjugiert Komplexen über, so erhalten wir wegen $N_1' - N_1 \leq M_1$ und $M_1 \geqslant 1$ mit

$$G' := \{(n_1,n_2) : n_1 \in \langle N_1, N_1' \rangle;\ n_2 \in \langle N_2(n_1), N_2^*(n_1) \rangle\} \quad (22)$$

und

$$S_3 := \sum_{(n_1,n_2) \in G'} \sum n_1^{1/6} n_2^{-2/3} e(c_2(xn_1n_2^2)^{1/3}) \quad (23)$$

$$S_1(N_1,N_1') \ll x^{1/6} |S_3| + (x N_1)^{-1/2} M_1 N^2 + \quad (24)$$
$$+ (x N_1)^{1/3} M_1 N^{-2/3}.$$

Setzen wir $N_2 := 2x N_1 N'^{-3}$ und $N_2' := \max(2x N_1' N^{-3}, 2N_2)$, so gilt

$$N_2' - N_2 \geqslant N_2 \quad (25)$$

und wegen (1 - 4) und (20) für $n_1 \in \langle N_1, N_1' \rangle$ die Abschätzungskette

$$1 \leq x N_1 N^{-3} \ll N_2 \leq N_2(n_1) < N_2^*(n_1) \leq N_2' \ll N_2 \ll x N_1 N^{-3}. \quad (26)$$

Wegen (22) folgt daraus

$$G' \subseteq R := \{(n_1,n_2) : n_j \in \langle N_j, N_j' \rangle;\ j=1,2\}. \quad (27)$$

Setzen wir $e_{n_1,n_2} := e(c_2(xn_1n_2^2)^{1/3})$, falls $(n_1,n_2) \in G'$,

und sonst $e_{n_1,n_2} := 0$, so ist $S_3 = \sum_{N_1 \le n_1 \le N_1'} n_1^{1/6} S_4(n_1)$,

wenn $S_4(n_1) := \sum_{N_2 \le n_2 \le N_2'} n_2^{-2/3} e_{n_1,n_2}$ bedeutet. Da nun $n_1^{1/6}$ im Intervall $\langle N_1, N_1' \rangle$ monoton wächst und wegen (1 - 2) $\ll N_1^{1/6}$ ist, gilt auf Grund des Hilfssatzes 1 mit geeignetem [1]) $N_1'' \in \langle N_1, N_1' \rangle$ $S_3 \ll N_1^{1/6} \left| \sum_{N_1 \le n_1 \le N_1''} S_4(n_1) \right|$ oder

$S_3 \ll N_1^{1/6} \left| \sum_{N_2 \le n_2 \le N_2'} n_2^{-2/3} S_5(n_2) \right|$ mit $S_5(n_2) := \sum_{N_1 \le n_1 \le N_1''} e_{n_1,n_2}$.

Da $n_2^{-2/3}$ in $\langle N_2, N_2' \rangle$ monoton und $\le N_2^{-2/3}$ ist, folgt durch nochmalige partielle Summation mit geeignetem $N_2'' \in \langle N_2, N_2' \rangle$

$$S_3 \ll N_1^{1/6} N_2^{-2/3} |S_6|, \tag{28}$$

wenn

$$S_6 := \sum_{N_2 \le n_2 \le N_2''} S_5(n_2) = \sum\sum_{(n_1,n_2) \in G''} e(c_2 (x n_1 n_2^2)^{1/3}) \tag{29}$$

bedeutet und G'' der Durchschnitt von G' mit dem Rechteck $\{(n_1,n_2) : n_j \in \langle N_j, N_j'' \rangle;\ j=1,2\}$ ist. Daher gilt wegen (27)

$$G'' \subseteq R \tag{30}$$

und wegen (22)

$$G'' = \{(n_1,n_2) : n_1 \in \langle N_1, N_1'' \rangle;\ n_2 \in \langle N_2(n_1), \min(N_2^*(n_1), N_2'') \rangle\}. \tag{31}$$

Setzt man (28) in (24) ein und beachtet (26), so hat man

$$\begin{aligned} S_1(N_1,N_1') &\ll (x N_1)^{1/6} (x N_1 N^{-3})^{-2/3} |S_6| + \dots \\ &= (x N_1)^{-1/2} N^2 |S_6| + (x N_1)^{-1/2} M_1 N^2 + \\ &\qquad + (x N_1)^{1/3} M_1 N^{-2/3}. \end{aligned} \tag{32}$$

---

[1]) N_1'' sei ein Wert des Intervalls $\langle N_2, N_2' \rangle$, für den die Summe $\sum_{N_1 \le n_1 \le N_1''} S_4(n_1)$ ihr Betragsmaximum annimmt.

V. Wir behaupten, es genügt

$$S_6 \ll r^{-1/2} x\, N_1 M_1 N^{-3} \tag{33}$$

zu zeigen, um die Behauptung (8) zu beweisen. Wäre nämlich (33) schon bewiesen, so würde aus (32)

$$\begin{aligned} S_1(N_1,N_1') &\ll (x\,N_1)^{-1/2}\, N^2 \cdot r^{-1/2} x\, N_1 M_1 N^{-3} \\ &\quad + (x\,N_1)^{-1/2}\, N^2 \cdot M_1 + (x\,N_1)^{1/3}\, M_1 N^{-2/3} \end{aligned} \tag{34}$$

folgen. Das erste Glied rechts ist offenbar nicht kleiner als das zweite, wenn

$$r^{-1/2} x\, N_1 N^{-3} \geq 1 \quad \text{oder} \quad r \leq (x\,N_1 N^{-3})^2$$

gilt. Das ist aber wegen (14) und (26) richtig. Aus (34) würde sich also

$$S_1(N_1,N_1') \ll r^{-1/2} (x\,N_1)^{1/2}\, M_1 N^{-1} + (x\,N_1)^{1/3}\, M_1 N^{-2/3} \tag{35}$$

ergeben. Das erste Glied rechts ist nicht kleiner als das zweite, wenn

$$r \leq (x\,N_1 N^{-2})^{1/3} \tag{36}$$

gilt. Wegen (4 - 5) ist $x \leq N^4$ und $M_1 \leq N$, also $x\,M_1 \leq N^5$.

Das ist aber äquivalent zu $(x\,M_1 N^{-3})^{1/2} \leq (x\,M_1 N^{-2})^{1/3}$, woraus wegen (14) und $M_1 \leq N_1$ (36) folgt. Aus (35) und (12) würde sich schließlich

$$\begin{aligned} S_1(N_1,N_1') &\ll r^{-1/2} (x\,N_1)^{1/2}\, M_1 N^{-1} \\ &= (M_1/N_1)^{c_0^{-1/2}} (x^{1+l}\, M_1^{1+2l-k}\, N^{-3-4l})^{-1/(4+6l)} (x\,N_1)^{1/2}\, M_1 N^{-1} \end{aligned}$$

ergeben, also auch die Behauptung (8).

VI. Wir dürfen uns auf $r \geq 2$ beschränken; denn andernfalls ist die noch zu zeigende Abschätzung (33) wegen (26 - 27), (29 - 30) und (38) trivial. Daher folgt aus (14) und (25 - 26), wenn wir in (11) x_0 groß genug machen,

$$2 \leq r < r^2 \leq x\, N_1 N^{-3} \cdot x^{-c_1} < N_2 \leq N_2' - N_2. \tag{37}$$

Wir wenden Hilfssatz 2 mit

$$h(n_1,n_2) := c_2 (x n_1 n_2^2)^{1/3},$$

$G := G''$,

$\varphi := r$

auf S_6 an. Wegen (30) und (37) sind die Voraussetzungen (1.1 - 2) erfüllt. Aus (1 - 2) und (26) folgt

$$N_1' - N_1 + 1 \ll M_1 \quad \text{und} \quad N_2' - N_2 + 1 \ll N_2, \tag{38}$$

und daher aus (1.3) und (29)

$$S_6 \ll r^{-1/2} M_1 N_2 + (r^{-1} M_1 N_2 \sum_{1 \le p_1 \le r-1} |S_7(p_1)|)^{1/2} \tag{39}$$

mit

$$S_7(p_1) := \sum_{(n_1,n_2) \in G_{p_1}} \sum e(c_2 (xn_1)^{1/3} \{(n_2+p_1)^{2/3} - n_2^{2/3}\})$$

$$= \sum_{(n_1,n_2) \in G_{p_1}} \sum e(c_4 p_1 (xn_1)^{1/3} \int_0^1 (n_2+p_1 t_1)^{-1/3} \, dt_1)$$

und

$$G_{p_1} := \{(n_1,n_2) : (n_1,n_2) \in G''; \ (n_1,n_2+p_1) \in G''\}.$$

Wenden wir Hilfssatz 2, diesmal jedoch mit

$$h(n_1,n_2) := c_4 p_1 (xn_1)^{1/3} \int_0^1 (n_2+p_1 t_1)^{-1/3} \, dt_1,$$

$G := G_{p_1} \subseteq G''$,

$\varphi := r^2$

auf $S_7(p_1)$ an, so sind die Voraussetzungen (1.1 - 2) wiederum erfüllt, und es folgt aus (1.3) für $p_1 \in \langle 1, r-1 \rangle$

$$S_7(p_1) \ll r^{-1} M_1 N_2 + (r^{-2} M_1 N_2 \sum_{1 \le p_2 \le r^2-1} |S_8(p_1,p_2)|)^{1/2} \tag{40}$$

mit

$$S_8(p_1,p_2) := \sum_{(n_1,n_2) \in G_{p_1,p_2}} \sum e(F(n_1,n_2)), \tag{41}$$

$$G_{p_1,p_2} := \{(n_1,n_2) : (n_1,n_2) \in G''; \ (n_1,n_2+p_1+p_2) \in G''\} \tag{42}$$

und, falls (n_1,n_2) in G_{p_1,p_2} liegt,

$$F(n_1,n_2) := -c_5 p_1 p_2 (xn_1)^{1/3} \int_0^1 \int_0^1 (n_2+p_1 t_1+p_2 t_2)^{-4/3} \, dt_1 dt_2. \tag{43}$$

Setzen wir (40) in (39) ein, so erhalten wir

$$S_6 \ll r^{-1/2} M_1 N_2 + (r^{-1} M_1 N_2 \sum_{1 \le p_1 \le r-1} \{r^{-1} M_1 N_2 + (r^{-2} M_1 N_2 \sum_{1 \le p_2 \le r^2-1} |S_8(p_1,p_2)|)^{1/2}\})^{1/2}$$

oder

$$S_6 \ll r^{-1/2} M_1 N_2 + r^{-1}(M_1 N_2)^{3/4} (\sum_{1 \le p_1 \le r-1} \{\sum_{1 \le p_2 \le r^2-1} |S_8(p_1,p_2)|\}^{1/2})^{1/2}. \tag{44}$$

VII. In den Abschnitten VII. - XIII. gelte für die natürlichen Zahlen p_1 und p_2

$$p_j \in \langle 1, r^j - 1 \rangle \quad \text{für} \quad j = 1, 2; \tag{45}$$

ferner sei G_{p_1,p_2} nicht leer.

Im Hinblick auf (43) setzen wir

$$F := p_1 p_2 (x N_1 N_2^{-4})^{1/3}. \tag{46}$$

Wegen (27), (30) und (42) gilt für alle $(n_1,n_2) \in G_{p_1,p_2}$ $N_1 \le n_1 \le N_1'$ und $N_2 \le n_2 \le n_2 + p_1 + p_2 \le N_2'$, so daß aus (1 - 2), (26), (43) und (46) für $q = 0, 1, 2, \ldots$ und $(n_1,n_2) \in G_{p_1,p_2}$

$$F N_2^{-q} \ll (-1)^{q+1} F_{n_2^q}(n_1,n_2) \ll F N_2^{-q} \tag{47}$$

mit nur von q abhängigen $\ll$-Konstanten folgt.
Wegen (26), (37) und (45) gilt für $m \ge N_2$

$$\frac{p_1 + p_2}{m} < \frac{r + r^2}{N_2} \ll x^{-c_1}. \tag{48}$$

Ist nun x_0 in (11) so groß, daß $(r+r^2)/N_2 < 1/2$ ausfällt, so folgt aus (48) für alle reellen σ mit nur von σ

abhängiger O-Konstanten

$$\int_0^1\int_0^1 (1 \pm \frac{p_1t_1+p_2t_2}{m})^{\sigma} dt_1dt_2 = 1 + O(x^{-c_1}) \quad \text{für} \quad m \geq N_2. \tag{49}$$

Wir definieren für $m \geq N_2$ die Hilfsfunktion

$$f(m) := -c_5p_1p_2x^{1/3} \int_0^1\int_0^1 (m+p_1t_1+p_2t_2)^{-4/3}dt_1dt_2. \tag{50}$$

Wegen (27), (30) und (42) liegt G_{p_1,p_2} ganz in der Halbebene $n_2 \geq N_2$. Daher folgt aus (43) und (50)

$$F(n_1,n_2) = n_1^{1/3} f(n_2) \quad \text{für} \quad (n_1,n_2) \in G_{p_1,p_2}. \tag{51}$$

Differenziert man (50) (q+1)-mal (q = 0,1,2,...) nach m, so erhält man wegen (49) für alle $m \geq N_2$ mit nur von q abhängiger O-Konstanten

$$f^{(q+1)}(m) = (-1)^q \gamma\, s(s+1)\cdots(s+q-1)m^{-s-q}\{1+O(x^{-c_1})\}, \tag{52}$$

wenn

$$s := 7/3 \quad \text{und} \quad \gamma := \tfrac{4}{3}\cdot c_5p_1p_2x^{1/3} \tag{53}$$

gesetzt wird.

Da die in (1.13) auftretende Zahl c nicht von m_2 abhängt, gilt Hilfssatz 3 auch für $m_2 := \infty$. Man muß dann natürlich $\langle m_1,m_2\rangle$ durch $\langle m_1,\infty)$, (1.7) durch $\mu_1 := \lim\limits_{m\to\infty} f'(m)$ und $\langle\mu_1,\mu_2\rangle$ durch $(\mu_1,\mu_2\rangle$ ersetzen.

Wegen (50) sind nun für jedes ganze $Q \geq 3$ mit $m_1 := N_2$ und $m_2 := \infty$ die Voraussetzungen (1.4 - 6) und wegen (53) die Voraussetzung (1.11) erfüllt. Das Intervall $(\mu_1,\mu_2\rangle$ und die Funktionen $m(\mu)$ und $\varphi(\mu)$ mögen wie in (1.7 - 10) erklärt sein. Insbesondere folgt aus (50) $\mu_1 = \lim\limits_{m\to\infty} f'(m) = 0$. Es werde jetzt γ zwischen 0 und 1/2 beliebig gewählt. Dann ist die in (1.13) auftretende Zahl c nach Festlegung von s = 7/3 nur noch von Q und γ abhängig. Ist daher $x_1(Q,\gamma)$ so groß, daß für alle $x > x_1(Q,\gamma)$ (1.13) aus (52) folgt, so ist auch (1.14) richtig, wenn wir gemäß (1.12)

$$\sigma := 3/7 \quad \text{und} \quad \eta := (\tfrac{4}{3}\cdot c_5p_1p_2)^{3/7}x^{1/7} \tag{54}$$

setzen. Definieren wir noch

$$\widetilde{\varphi}(\mu) := \tfrac{7}{4}\cdot\eta\mu^{4/7} = c_6(p_1p_2)^{3/7}x^{1/7}\mu^{4/7} \qquad (\mu>0), \tag{55}$$

so ist (1.14) äquivalent zu

$$|\varphi^{(p)}(\mu) - \widetilde{\varphi}^{(p)}(\mu)| < \gamma|\widetilde{\varphi}^{(p)}(\mu)|, \tag{56}$$

gültig für $p = 1,2,3,\ldots,Q$ $(Q \geq 3)$, $\mu \in (0,\mu_2\rangle$, $x > x_1(Q,\gamma)$.

(56) ist aber auch für $p = 0$ richtig; (57)

denn aus (50) folgt $\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{m\to\infty} mf'(m) = 0$, also aus

(1.9 - 10) $\varphi(+0) = 0$, da ja $m(\mu) \to m_2 = \infty$ geht für

$\mu \to \mu_1+0 = +0$. Die Behauptung (57) folgt daher unmittelbar aus der Ungleichung $(1-\gamma)\widetilde{\varphi}' < \varphi' < (1+\gamma)\widetilde{\varphi}'$, indem man sie von 0 bis $\mu\in(0,\mu_2\rangle$ integriert.

VIII. Es sei

$$N_2^{**}(n_1) := \min(N_2^{*}(n_1),\ N_2'') - p_1 - p_2. \tag{58}$$

Dann folgt aus (31) und (42)

$$G_{p_1,p_2} = \{(n_1,n_2) : n_1\in\langle N_1,N_1''\rangle\ ;\ n_2\in\langle N_2(n_1),N_2^{**}(n_1)\rangle\}. \tag{59}$$

Da G" als Durchschnitt des konvexen Vierecks G' mit einem Rechteck ebenfalls konvex ist, ist auch G_{p_1,p_2} laut (42) konvex und folglich zusammenhängend. Daher ist die Menge

$$J := \{n_1 : n_1\in\langle N_1,N_1''\rangle;\ N_2(n_1) \leq N_2^{**}(n_1)\} \tag{60}$$

ein in $\langle N_1,N_1'\rangle$ gelegenes abgeschlossenes Intervall, das genau dann leer ist, wenn G_{p_1,p_2} leer ist. Statt (59) kann man schreiben:

$$G_{p_1,p_2} = \{(n_1,n_2) : n_1\in J;\ n_2\in\langle N_2(n_1),N_2^{**}(n_1)\rangle\}. \tag{61}$$

Bis zum Ende dieses Abschnittes halten wir $n_1 \in J$ fest.

Setzen wir nun in Hilfssatz 4

$$h(n_2) := F(n_1,n_2),$$
$$\langle a,b\rangle := \langle N_2(n_1),\ N_2^{**}(n_1)\rangle, \tag{62}$$

so sind wegen (43), (47) und (61 - 62) mit $H_q := F\,N_2^{-q}$

($q = 2,3,4$) die Voraussetzungen (1.15) sämtlich erfüllt. Gemäß (1.16) definieren wir für alle

$$\nu \in \langle \alpha(n_1),\ \beta(n_1)\rangle := \langle F_{n_2}(n_1, N_2^{**}(n_1)),\ F_{n_2}(n_1, N_2(n_1))\rangle \tag{63}$$

die Funktion

$$n_2(n_1,\nu) \in \langle N_2(n_1),\ N_2^{**}(n_1)\rangle \tag{64}$$

durch

$$F_{n_2}(n_1, n_2(n_1,\nu)) = \nu. \tag{65}$$

Aus (1.6), (1.8), (26), (50 - 51), (60) und (63) folgt

$$\begin{aligned}\langle \alpha(n_1), \beta(n_1)\rangle &= \langle n_1^{1/3} f'(N_2^{**}(n_1)),\ n_1^{1/3} f'(N_2(n_1))\rangle \\ &\subseteq (0,\ n_1^{1/3}\mu_2\rangle.\end{aligned} \tag{66}$$

Daher liegt $\mu = n_1^{-1/3}\nu$ für alle $\nu \in \langle \alpha(n_1),\ \beta(n_1)\rangle$ in $(0,\ \mu_2\rangle$, und aus (1.9) und (51) ergibt sich

$$F_{n_2}(n_1, m(n_1^{-1/3}\nu)) = n_1^{1/3} f'(m(n_1^{-1/3}\nu)) = n_1^{1/3}\cdot n_1^{-1/3}\nu = \nu,$$

also

$$n_2(n_1,\nu) = m(n_1^{-1/3}\nu). \tag{67}$$

Aus Hilfssatz 4 folgt dann gemäß (1.17)

$$\begin{aligned}&\sum_{N_2(n_1)\le n_2\le N_2^{**}(n_1)} e(F(n_1,n_2)) \\ &\quad = e(-1/8) \sum_{\alpha(n_1)\le\nu\le\beta(n_1)} g(n_1,\nu)\, e(-\phi(n_1,\nu)) \\ &\quad + O(N_2\{F\,N_2^{-3}\}^{1/3}) + O(\log\{2+N_2 F\,N_2^{-2}\}) + O(\{F\,N_2^{-2}\}^{-1/2})\end{aligned} \tag{68}$$

mit

$$g(n_1,\nu) := |F_{n_2^2}(n_1, m(n_1^{-1/3}\nu))|^{-1/2} \tag{69}$$

und

$$\phi(n_1,\nu) := \nu\, m(n_1^{-1/3}\nu) - F(n_1, m(n_1^{-1/3}\nu)). \tag{70}$$

IX. Summieren wir (68) über alle ganzen $n_1 \in J$, und beachten wir, daß das mittlere Fehlerglied in (68) entweder vom ersten oder vom letzten majorisiert wird, jenachdem ob $F \ge 1$

oder $F < 1$ ist, so erhalten wir mit der Abkürzung (41) wegen $J \subseteq \langle N_1, N_1' \rangle$ und (38)

$$S_8(p_1,p_2) \ll \Big| \sum_{(n_1,\nu)\in\Gamma_{p_1,p_2}} \sum g(n_1,\nu) e(\Phi(n_1,\nu)) \Big| + F^{1/3}M_1 + F^{-1/2}M_1N_2, \tag{71}$$

wenn

$$\Gamma_{p_1,p_2} := \{(n_1,\nu) : n_1 \in J;\ \nu \in \langle \alpha(n_1), \beta(n_1)\rangle\} \tag{72}$$

bedeutet. Γ_{p_1,p_2} ist das Bild von G_{p_1,p_2} bei der stetigen, eineindeutigen Abbildung $(n_1,n_2) \to (n_1, F_{n_2}(n_1,n_2))$.

Wegen (61), (64) und (67) folgt aus (47) für $q = 1,2$ und alle $(n_1,\nu) \in \Gamma_{p_1,p_2}$

$$F N_2^{-q} \ll (-1)^{q+1} F_{n_2}^{q}(n_1, m(n_1^{-1/3}\nu)) \ll F N_2^{-q}. \tag{73}$$

X. Wir zeigen, daß Γ_{p_1,p_2} eine Darstellung der Form

$$\Gamma_{p_1,p_2} = \{(n_1,\nu) : n_1 \in \langle N_1(\nu), N_1^*(\nu)\rangle;\ \nu \in \langle \nu_1, \nu_2\rangle\} \tag{74}$$

erlaubt. Natürlich gilt dann

$$\langle N_1(\nu), N_1^*(\nu)\rangle \subseteq J \subseteq \langle N_1, N_1'\rangle, \tag{75}$$

und aus (65), (67) und (73) folgt

$$F N_2^{-1} \ll \nu_1 \le \nu_2 \ll F N_2^{-1}, \tag{76}$$

wenn $\langle \nu_1, \nu_2\rangle$ das Intervall [1]) all derjenigen ν ist, für die $N_1(\nu) \le N_1^*(\nu)$ ist.

Wegen (20), (43), (58) und (63) erhält man

$$\alpha(n_1) = c_7 p_1 p_2 x^{1/3} \max(I_1, I_2),$$

$$\beta(n_1) = c_7 p_1 p_2 x^{1/3} I_3,$$

wobei

---

[1]) Mit G_{p_1,p_2} ist auch Γ_{p_1,p_2} nicht leer und zusammenhängend.

$$I_1 := n_1^{1/3} \int_0^1 \int_0^1 (2x\, N^{-3} n_1 - p_1 t_1 - p_2 t_2)^{-7/3} dt_1 dt_2 ,$$

$$I_2 := n_1^{1/3} \int_0^1 \int_0^1 (N_2'' - p_1 t_1 - p_2 t_2)^{-7/3} dt_1 dt_2 ,$$

$$I_3 := n_1^{1/3} \int_0^1 \int_0^1 (2x\, N'^{-3} n_1 + p_1 t_1 + p_2 t_2)^{-7/3} dt_1 dt_2$$

ist. Wegen (20) und (26) gilt für alle $n_1 \in J \subseteq \langle N_1, N_1' \rangle$ $2x\, N^{-3} n_1 > 2x\, N'^{-3} n_1 \geq N_2$. Daher folgt aus (49), wenn wir in (11) x_0 groß genug machen,

$$\frac{d}{dn_1} I_1 = \frac{1}{3} \cdot n_1^{-2/3} \int_0^1 \int_0^1 (\ldots)^{-7/3} dt_1 dt_2$$

$$- \frac{7}{3} \cdot 2x\, N^{-3} n_1^{1/3} \int_0^1 \int_0^1 (\ldots)^{-10/3} dt_1 dt_2 \qquad (77)$$

$$= -2(2x\, N^{-3})^{-7/3} n_1^{-3} \{1 + O(x^{-c_1})\} < 0, \quad ^{1)}$$

und entsprechend

$$\frac{d}{dn_1} I_3 < 0. \qquad (78)$$

(78) lehrt, daß die "obere" Berandung $\beta(n_1)$ von Γ_{p_1,p_2} in einer n_1-ν-Ebene streng monoton fällt. Da aus (26), (58) und (60) $N_2'' - p_1 - p_2 > 0$ folgt, lehren (77) und $d(n_1^{1/3})/dn_1 > 0$, daß die "untere" Berandung $\alpha(n_1)$ von Γ_{p_1,p_2} entweder streng monoton ist oder in einen "ersten" streng monoton fallenden und einen "zweiten" streng monoton wachsenden Teil zerfällt. In jedem Falle haben die Geraden ν = const. höchstens zwei Punkte mit dem Rand von Γ_{p_1,p_2} gemeinsam, woraus (74) folgt.

---

1) Wegen $n_1^{1/3} \int_0^1 \int_0^1 (\ldots)^{-7/3} dt_1 dt_2 = (2x\, N^{-3})^{-7/3} n_1^{-2} \{1 + O(x^{-c_1})\}$ nicht anders zu erwarten.

Wir summieren in (71) zuerst über n_1. Wegen (74) ergibt sich

$$S_8(p_1,p_2) \ll \sum_{\nu_1 \le \nu \le \nu_2} \Big| \sum_{N_1(\nu) \le n_1 \le N_1^*(\nu)} g(n_1,\nu) e(\phi(n_1,\nu)) \Big| + F^{1/3} M_1 + F^{-1/2} M_1 N_2. \tag{79}$$

XI. Für alle $m \ge N_2$ dürfen wir wegen (52) und $s = 7/3$ auf

$$\Big(\frac{f''(m)}{f'(m)}\Big)' = \frac{f'''(m)}{f'(m)} - \Big(\frac{f''(m)}{f'(m)}\Big)^2 = \frac{7}{3} \cdot m^{-2}\{1 + O(x^{-c_1})\} > 0 \tag{80}$$

schließen, sofern wir in (11) x_o groß genug wählen. Nun ist $\mu = n_1^{-1/3}\nu$ in Γ_{p_1,p_2} eine monotone Funktion von n_1, deren Werte laut (66) und (72) in $(0,\mu_2\rangle$ liegen. Da $m(\mu)$ nach (1.6 - 9) im Intervall $(0,\mu_2\rangle$ monoton ist, ist auch $m(n_1^{-1/3}\nu)$ für alle $(n_1,\nu) \in \Gamma_{p_1,p_2}$ monoton in n_1. Wegen (1.9) gilt aber in Γ_{p_1,p_2}

$$n_1^{1/3} f''(m(n_1^{-1/3}\nu)) = \nu \frac{f''(m(n_1^{-1/3}\nu))}{n_1^{-1/3}\nu} = \nu \frac{f''(m(n_1^{-1/3}\nu))}{f'(m(n_1^{-1/3}\nu))},$$

so daß aus (51) und (80) die Monotonie des Faktors (69) folgt. Dieser Faktor gestattet in Γ_{p_1,p_2} laut (73) die Abschätzung

$$g(n_1,\nu) \ll (F N_2^{-2})^{-1/2} = F^{-1/2} N_2.$$

Daher liefert Hilfssatz 1, angewandt auf die innere Summe in (79), mit geeigneten Zahlen

$$N_1^{**}(\nu) \in \langle N_1(\nu), N_1^*(\nu)\rangle, \tag{81}$$

wenn wir noch

$$S_9(\nu) := \sum_{N_1(\nu) \le n_1 \le N_1^{**}(\nu)} e(\phi(n_1,\nu)) \tag{82}$$

setzen,

$$S_8(p_1,p_2) \ll F^{-1/2} N_2 \sum_{\nu_1 \le \nu \le \nu_2} |S_9(\nu)| + F^{1/3} M_1 + F^{-1/2} M_1 N_2. \tag{83}$$

XII. In diesem Abschnitt sei $\nu \in \langle \nu_1, \nu_2 \rangle$ fest.

Laut (1.27) und Hilfssatz 9 ist mit (k,l) auch

$$(\kappa,\lambda) = (l - 1/2,\ k + 1/2) \tag{84}$$

ein "beliebiges aber festes" Grundexponentenpaar.

Zur Abschätzung von $S_9(\nu)$ setzen wir in Definition 1 (S.6)

$$d := 6/7, \tag{85}$$

$$\langle a,b \rangle := \langle N_1(\nu),\ N_1^{**}(\nu) \rangle, \tag{86}$$

$$h(n_1) := \phi(n_1,\nu), \tag{87}$$

$$Y := \tfrac{1}{7} \cdot c_6 (p_1 p_2)^{3/7} x^{1/7} \nu^{4/7}, \tag{88}$$

$$z := Ya^{-d} = \tfrac{1}{7} \cdot c_6 (p_1 p_2)^{3/7} x^{1/7} \nu^{4/7} \cdot N_1^{-6/7}(\nu). \tag{89}$$

Voraussetzung (1.22) ist wegen (1 – 2), (75) und (81) erfüllt, Voraussetzung (1.23) wegen (88). Nach der Festlegung von κ, λ und d sind in Definition 1 auch die Zahlen $Q \geq 5$ und ε zwischen 0 und 1/2 festgelegt. Variiert (n_1,ν) in Γ_{p_1,p_2}, so liegt $\mu = n_1^{-1/3}\nu$ nach (66) und (72) in $(0,\mu_2\rangle$. Daher gilt in Γ_{p_1,p_2} wegen (1.10), (51) und (70)

$$\begin{aligned} \phi(n_1,\nu) &= n_1^{1/3} \{ n_1^{-1/3}\nu \cdot m(n_1^{-1/3}\nu) - f(m(n_1^{-1/3}\nu)) \} \\ &= n_1^{1/3} \Phi(n_1^{-1/3}\nu). \end{aligned}$$

Mit $\Phi(n_1^{-1/3}\nu)$ ist nun auch $\phi(n_1,\nu)$ in Γ_{p_1,p_2} Q-mal partiell nach n_1 differenzierbar. Wir erhalten mit gewissen absoluten (nicht notwendig positiven) Konstanten c_{pq} $(0 \leq q \leq Q - 1;\ 0 \leq p \leq q + 1)$

$$\phi_{n_1^{q+1}}(n_1,\nu) = \sum_{p=0}^{q+1} c_{pq} n_1^{-q-(p+2)/3} \nu^p \Phi^{(p)}(n_1^{-1/3}\nu); \tag{90}$$

denn für q = 0 ist (90) richtig, und differenziert man das allgemeine Glied der Summe partiell nach n_1, so entstehen, von Koeffizienten abgesehen, die Glieder

$$n_1^{-(q+1)-(p+2)/3} \nu^p \Phi^{(p)}(n_1^{-1/3}\nu)$$

und

$$n_1^{-(q+1)-((p+1)+2)/3}\nu^{p+1}\varphi^{(p+1)}(n_1^{-1/3}\nu),$$

die sämtlich in der (90) entsprechenden Summe für q+1 statt q vorkommen. Setzt man in Γ_{p_1,p_2} - vgl. (55) -

$$\tilde{\Phi}(n_1,\nu) := n_1^{1/3}\tilde{\varphi}(n_1^{-1/3}\nu) = c_6(p_1p_2)^{3/7}x^{1/7}n_1^{1/7}\nu^{4/7}, \tag{91}$$

so erhalten wir mit denselben Konstanten c_{pq} wie in (90) für q = 0,1,2,...,Q-1

$$\tilde{\Phi}_{n_1^{q+1}}(n_1,\nu) = \sum_{p=0}^{q+1} c_{pq}n_1^{-q-(p+2)/3}\nu^p\tilde{\varphi}^{(p)}(n_1^{-1/3}\nu). \tag{92}$$

Aus (56 - 57), (90) und (92) folgt für $x > x_1(Q,\gamma)$, $(n_1,\nu) \in \Gamma_{p_1,p_2}$ und q = 0,1,2,...,Q-1

$$\begin{aligned} |\Phi_{n_1^{q+1}}(n_1,\nu) - \tilde{\Phi}_{n_1^{q+1}}(n_1,\nu)| &= \Big|\sum_{p=0}^{q+1} c_{pq}\cdots\{\varphi^{(p)} - \tilde{\varphi}^{(p)}\}\Big| \\ &< \gamma\sum_{p=0}^{q+1}|c_{pq}|n_1^{-q-(p+2)/3}\nu^p|\tilde{\varphi}^{(p)}(n_1^{-1/3}\nu)|. \end{aligned} \tag{93}$$

Weiter folgt in Γ_{p_1,p_2} aus (55) und (91) mit geeigneten absoluten Konstanten c'_{pq} $(0 \le q \le Q-1;\ 0 \le p \le q+1)$

$$\begin{aligned} n_1^{-q-(p+2)/3}\nu^p\tilde{\varphi}^{(p)}(n_1^{-1/3}\nu) &= n_1^{1/3}\frac{(n_1^{-1/3}\nu)^p\cdot\tilde{\varphi}^{(p)}(n_1^{-1/3}\nu)}{n_1^{q+1}} \\ &= c'_{pq}\tilde{\Phi}_{n_1^{q+1}}(n_1,\nu), \end{aligned} \tag{94}$$

was man leicht auch ohne Rechnung einsieht, da $\tilde{\varphi}$ und $\tilde{\Phi}$ nichtlineare Potenzfunktionen ihrer Argumente sind. Wir wählen jetzt γ zwischen 0 und 1/2 so, daß für jedes q = 0,1,2,...,Q-1

$$\gamma\sum_{p=0}^{q+1}|c_{pq}c'_{pq}| \le \varepsilon \tag{95}$$

ausfällt. Mit Q und ε ist nun auch γ durch κ, λ und d festgelegt, und wir können wegen (84 - 85) x_o in (11),

das ja von k und l abhängen darf, größer als $x_1(Q,\gamma)$ annehmen. Daher erhalten wir aus (93 - 95) in Γ_{p_1,p_2}, also wegen (74) und (81) auch in $\langle N_1(\nu),\ N_1^{**}(\nu)\rangle$, für $q = 0,1,2,\ldots,\vartheta-1$

$$|\Phi_{n_1^{q+1}}(n_1,\nu) - \tilde{\Phi}_{n_1^{q+1}}(n_1,\nu)| < \varepsilon|\tilde{\Phi}_{n_1^{q+1}}(n_1,\nu)|. \tag{96}$$

(96) ist aber wegen (85 - 88) und (91) mit (1.25) identisch, so daß auch diese Voraussetzung in Definition 1 erfüllt ist.

1) Ist $z > 1$,

so ist Voraussetzung (1.24) erfüllt, also sämtliche Voraussetzungen in Definition 1, und es muß folglich (1.21) gelten, da andernfalls das Grundexponentenpaar (κ,λ) entgegen Hilfssatz 8 kein Exponentenpaar sein könnte. Aus (1 - 2), (75) und (81) folgt

$$N_1 \leq N_1(\nu) \leq N_1^{**}(\nu) \ll N_1, \tag{97}$$

und daher aus (76) und (89)

$$z \ll (p_1p_2)^{3/7}x^{1/7}.(F\,N_2^{-1})^{4/7}.N_1^{-6/7}$$
$$= (p_1p_2(x\,N_1N_2^{-4})^{1/3})^{3/7}.F^{4/7}.N_1^{-1} \ll z,$$

oder - vgl. (46) -

$$z \ll F\,N_1^{-1} \ll z. \tag{98}$$

(1.21) ist also wegen (82), (86 - 87) und (97 - 98) äquivalent zu

$$S_9(\nu) \ll (F\,N_1^{-1})^{\kappa}N_1^{\lambda}. \tag{99}$$

2) Ist aber $z \leq 1$, (100)

so wenden wir Hilfssatz 5 mit

$$\langle a,b\rangle := \langle N_1(\nu),\ N_1^{**}(\nu)\rangle,$$
$$h(n_1) := \Phi(n_1,\nu)$$

auf $S_9(\nu)$ an. Trägt man (87) in (1.25) ein, so folgt sofort für alle $n_1 \in \langle N_1(\nu),\ N_1^{**}(\nu)\rangle$, wenn man (86), (89) und (98) beachtet, $0 < z\,N_1^{-1} = Y\,N_1^{-d-1} \ll -\Phi_{n_1^2}(n_1,\nu)$, also

(1.18) mit

$$H_2 := z\, N_1^{-1}. \tag{101}$$

Da nach (1.25) $\Phi_{n_1}(n_1,\nu) > 0$ und nach (89) und (91) $z = \tilde{\Phi}_{n_1}(N_1(\nu),\nu)$ ist, folgt aus (96) und $0 < \varepsilon < 1/2$

$$\Phi_{n_1}(N_1(\nu),\nu) - \Phi_{n_1}(N_1^{**}(\nu),\nu) < \Phi_{n_1}(N_1(\nu),\nu)$$
$$< (1+\varepsilon)\tilde{\Phi}_{n_1}(N_1(\nu),\nu) < \tfrac{3}{2}\cdot z < 2,$$

also (1.19). Daher ergibt Hilfssatz 5 wegen (98), (100 - 101) und $N_1 \geq 1$

$$S_9(\nu) \ll 1 + z^{-1/2} N_1^{1/2} \ll z^{-1/2} N_1^{1/2} \ll F^{-1/2} N_1. \tag{102}$$

Aus (99) und (102) folgt, ob nun $z >$ oder ≤ 1 ist,

$$S_9(\nu) \ll F^{\kappa} N_1^{\lambda-\kappa} + F^{-1/2} N_1. \tag{103}$$

XIII. Wir setzen (103) in (83) ein und erhalten wegen (76)

$$S_8(p_1,p_2) \ll F^{-1/2} N_2 \cdot F N_2^{-1} \cdot (F^{\kappa} N_1^{\lambda-\kappa} + F^{-1/2} N_1)$$
$$+ F^{1/3} M_1 + F^{-1/2} M_1 N_2$$

oder, wenn wir durch (84) wieder (k,l) einführen,

$$S_8(p_1,p_2) \ll F^{l} N_1^{1+k-l} + N_1 + F^{1/3} M_1 + F^{-1/2} M_1 N_2. \tag{104}$$

Aus (26) und (46) folgt $F \ll p_1 p_2 x^{-1} N_1^{-1} N^4 \ll F$, und daher aus (104)

$$S_8(p_1,p_2) \ll (p_1p_2)^{l} x^{-l} N_1^{1+k-2l} N^{4l}$$
$$+ N_1 + (p_1p_2)^{1/3}(x N_1)^{-1/3} M_1 N^{4/3} \tag{105}$$
$$+ (p_1p_2)^{-1/2}(x N_1)^{3/2} M_1 N^{-5}.$$

XIV. Aus (105) folgt für $p_1 \in \langle 1, r^{-1}\rangle$

$$\Big(\sum_{1\le p_2\le r^2-1} |S_8(p_1,p_2)|\Big)^{1/2} \ll p_1^{1/2} r^{l+1} x^{-1/2} N_1^{(1+k-2l)/2} N^{2l}$$
$$+ r N_1^{1/2} + p_1^{1/6} r^{4/3} (x N_1)^{-1/6} M_1^{1/2} N^{2/3}$$
$$+ p_1^{-1/4} r^{1/2} (x N_1)^{3/4} M_1^{1/2} N^{-5/2},$$

und daraus

$$\Big(\sum_{1\le p_1\le r-1} \Big(\sum_{1\le p_2\le r^2-1} |S_8(p_1,p_2)|\Big)^{1/2}\Big)^{1/2}$$
$$\ll r^{1+3l/4} x^{-1/4} N_1^{(1+k-2l)/4} N^{l}$$
$$+ r N_1^{1/4} + r^{5/4} (x N_1)^{-1/12} M_1^{1/4} N^{1/3}$$
$$+ r^{5/8} (x N_1)^{3/8} M_1^{1/4} N^{-5/4}.$$

Setzt man dies in (44) ein und beachtet (26), so hat man

$$S_6 \ll r^{-1/2} x N_1 M_1 N^{-3} + r^{3l/4} x^{(3-l)/4} N_1^{1+(k-2l)/4} M_1^{3/4} N^{l-9/4}$$
$$+ x^{3/4} N_1 M_1^{3/4} N^{-9/4} + r^{1/4} (x N_1)^{2/3} M_1 N^{-23/12} \qquad (106)$$
$$+ r^{-3/8} (x N_1)^{9/8} M_1 N^{-7/2}.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist nicht kleiner als das zweite, wenn

$$r \le (x^{1+l} N_1^{2l-k} M_1 N^{-3-4l})^{1/(2+3l)} \qquad (107)$$

ist, als das dritte, wenn

$$r \le (x M_1 N^{-3})^{1/2} \qquad (108)$$

ist, als das vierte, wenn

$$r \le (x N_1)^{4/9} N^{-13/9}$$
$$= (x M_1 N^{-3})^{1/2} (x^{-1} M_1^{-1} N)^{1/18} (N_1/M_1)^{4/9} \qquad (109)$$

ist, und als das fünfte, wenn

$$r \le (x N_1)^{-1} N^4 \qquad \text{ist.} \qquad (110)$$

(107) folgt aus (1), (12) und (1.20) [1], (108) aus (14).
Nun ist $-\frac{1}{3\cdot 7} < -\frac{11}{2\cdot 7\cdot 17} = (-1 - \frac{2}{17} + \frac{2}{7})\cdot\frac{1}{18}$, also wegen
- vgl. (4 - 5) - $M_1 \ll x^{2/17}$ und $N \gg x^{2/7}$

$$x^{-1/21} \ll x^{(-1 - 2/17 + 2/7)/18} \ll (x^{-1} M_1^{-1} N)^{1/18}.$$

Mit (1) und (14) folgt daraus (109).
Da $\frac{10}{7} - 2\cdot\frac{3}{17} + \frac{2}{7}(9\cdot\frac{3}{17} - \frac{38}{7}) = \frac{1190 - 294 + 378 - 1292}{49\cdot 17} =$
$= -\frac{18}{49\cdot 17} < -\frac{1}{50}$ ist, gilt wegen (6)

$$x^{\frac{10}{7} + 2c_0 - 2\cdot\frac{3}{17} + \frac{2}{7}(9\cdot\frac{3}{17} - \frac{38}{7})} \ll 1.$$

Wegen (1), (4) und $9\cdot\frac{3}{17} - \frac{38}{7} < 0$ ergibt sich daraus

$$x^{10/7} N_1^{2c_0} (x^{-2} N^9)^{3/17} N^{-38/7} \ll 1,$$

also wegen (5) erst recht

$$x^{10/7} N_1^{2c_0} M_1^{3/2} N^{-38/7} \ll 1$$

oder

$$x^{3/7} N_1^{-1+2c_0} M_1^{3/2} N^{-10/7} \ll (x N_1)^{-1} N^4,$$

so daß aus (13) schließlich (110) folgt.

Aus (106) ergibt sich dann wegen (107 - 110) die Abschätzung (33), und Satz 1 ist bewiesen.

---

[1]) Nur für $M_1 = N_1$ steht in (107) das Gleichheitszeichen.
Die nichtoptimale Wahl von r verschlechtert in der einzigen Anwendung des Satzes 1 nur die $\ll$-Konstante des Satzes 2, gestattet aber von (106) auf (33) zu schließen.

Ein Gegenstück zu Hilfssatz 12 ist unser

Satz 2

Ist

$$\xi \geq x^{2/7} \tag{111}$$

und (k,l) ein "beliebiges aber festes" Grundexponentenpaar mit

$$k < l \leq 2k, \tag{112}$$

so gilt

$$S(\xi,x^{1/3}) = \sum_{\xi<n\leq x^{1/3}} \psi(x/n^2) \ll (x^{1+2l}\xi^{-1+k})^{1/(5+7l+k)}. \tag{113}$$

Wir gliedern den Beweis in fünf Abschnitte:

I. Da $-[u]$ monoton mit u fällt, gilt für $\tau \geq 0$ $-[u+\tau] \leq -[u] \leq -[u-\tau]$. Addiert man $u-1/2$, so hat man

$$\psi(u+\tau) - \tau \leq \psi(u) \leq \psi(u-\tau) + \tau. \tag{114}$$

Ist

$$\xi \leq N \leq x^{1/3} \quad \text{und} \quad N < N' \leq 2N, \tag{115}$$

so folgt für positives Δ aus (114) mit der Abkürzung (1.30)

$$\begin{aligned} \sum_{N<n\leq N'} 4\Delta \int_0^{1/4\Delta} \psi(xn^{-2}+\tau)\,d\tau - \frac{N}{\Delta} &< S(N,N') \\ &< \sum_{N<n\leq N'} 4\Delta \int_0^{1/4\Delta} \psi(xn^{-2}-\tau)\,d\tau + \frac{N}{\Delta} \quad {}^{1}). \end{aligned} \tag{116}$$

Die Partialsummen [2]) der Reihe $\sum'_{n_1=-\infty}^{\infty} -\frac{e(n_1u)}{2\pi i n_1}$ sind beschränkt [3]) und konvergieren für nichtganze u gegen $\psi(u)$.

---

[1]) Vgl. [5], S. 25, 4. Zeile von unten.

[2]) "Partialsummen" seien für $N_1 = 1,2,3,\ldots$ die Summen $\sum'_{n_1=-N_1}^{N_1}, \ldots$. Der Strich am Summenzeichen soll andeuten, daß nicht über $n_1 = 0$ summiert wird.

[3]) Vgl. [2], § 1.

Daher folgt durch gliedweise Integration

$$\int_0^\delta \psi(u \pm \tau)\, d\tau = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}' - \frac{e(n_1 u)}{2\pi i n_1} \int_0^\delta e^{\pm 2\pi i n_1 \tau}\, d\tau.$$

Nun ist

$$\int_0^\delta e^{\pm 2\pi i n_1 \tau}\, d\tau = \frac{e^{\pm 2\pi i n_1 \delta} - 1}{\pm 2\pi i n_1} = \pm i\, \frac{\sin^2 \pi n_1 \delta}{\pi n_1} + \frac{\sin 2\pi n_1 \delta}{2\pi n_1},$$

und daher für $N < n \leq N'$

$$4\Delta \int_0^{1/4\Delta} \psi(xn^{-2} \pm \tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\Delta}{\pi^2} \left\{ \mp 2\, \frac{(\sin \frac{\pi n_1}{2 \cdot 2\Delta})^2}{n_1^2} + i\, \frac{\sin \frac{\pi n_1}{2\Delta}}{n_1^2} \right\} e(x n_1 n^{-2}). \qquad (117)$$

Mit der alten Bedeutung (16) von $S_2(n_1)$ setzen wir für $j = 1, 2$ und $0 < N_1 \leq N_1'$

$$S_{10}(j; N_1, N_1') := \sum_{N_1 \leq n_1 < N_1'} \Delta\, \frac{(\sin \frac{\pi n_1}{2j\Delta})^j}{n_1^2}\, S_2(n_1). \qquad (118)$$

Aus (116) und (117) folgt dann

$$S(N, N') \ll \frac{N}{\Delta} + |S_{10}(1;1,\infty)| + |S_{10}(2;1,\infty)|. \qquad (119)$$

II. Wegen (111) und (115) gilt $N' - N + 1 \ll N$ und daher - vgl. (16) - die triviale Abschätzung $S_2(n_1) \ll N$. Mit (118) folgt dann für $j = 1, 2$

$$S_{10}(j; \Delta^2, \infty) \ll \Delta N \sum_{n_1 \geq \Delta^2} n_1^{-2} \ll \frac{N}{\Delta},$$

und daher aus (119)

$$S(N, N') \ll \frac{N}{\Delta} + \sum_{j=1}^{2} |S_{10}(j;1,\Delta^2)|. \qquad (120)$$

Weiter gilt für $j = 1, 2$

$$|S_{10}(j;1,\Delta^2)| \leq |S_{10}(j;1,\Delta)| + \tag{121}$$
$$+ \sum_{1\leq p<\Delta} |S_{10}(j;\ p\Delta,\ \min((p+1)\Delta,\Delta^2))|$$

und

$$|S_{10}(j;1,\Delta)| \leq \sum_{0\leq q<\mathrm{ld}\Delta} |S_{10}(j;\ 2^q,\ \min(2^{q+1},\Delta))|. \tag{122}$$

III. In den Abschnitten III. und IV. sei

$$p \text{ ganz} \in \langle 1,\Delta) \quad \text{und} \quad q \text{ ganz} \in \langle 0,\ \mathrm{ld}\Delta). \tag{123}$$

Wegen (118) hat man für $j = 1, 2$

$$S_{10}(j;\ 2^q,\ \min(2^{q+1},\Delta)) =$$
$$= \sum_{2^q\leq n_1<2^{q+1},\Delta} \frac{\sin\frac{\pi n_1}{2j\Delta}}{n_1/\Delta} \cdot \frac{(\sin\frac{\pi n_1}{2j\Delta})^{j-1}}{n_1} \cdot S_2(n_1).$$

Im Intervall $(0, \Delta)$, also auch in $\langle 2^q,\ \min(2^{q+1},\Delta))$, ist der erste Faktor hinter dem Summenzeichen positiv, monoton und $\ll 1$. Daher liefert Hilfssatz 1 mit geeignetem

$$\beta_q' \in \langle 2^q,\ 2^{q+1}\rangle$$

$$S_{10}(j;\ 2^q,\ \min(2^{q+1},\Delta)) \ll \Big| \sum_{2^q\leq n_1\leq\beta_q'} \frac{(\sin\frac{\pi n_1}{2j\Delta})^{j-1}}{n_1} \cdot S_2(n_1)\Big|.$$

Nochmalige partielle Summation liefert, da $(\sin\frac{\pi n_1}{2j\Delta})^{j-1}\cdot n_1^{-1}$ im Summationsintervall positiv, monoton und $\leq 2^{-q}$ ist, mit geeignetem

$$\beta_q \in \langle 2^q,\ 2^{q+1}\rangle \tag{124}$$

$$S_{10}(j;\ 2^q,\ \min(2^{q+1},\Delta)) \ll 2^{-q}\,|S_1(2^q,\beta_q)|, \tag{125}$$

wenn S_1 die alte Bedeutung (8') hat.

Da $(\sin\frac{\pi n_1}{2j\Delta})^j$ $(j = 1, 2)$ im Intervall $\langle p\Delta,\ (p+1)\Delta)$ festes Vorzeichen hat und monoton ist, folgt durch

zweimalige partielle Summation mit geeigneten

$$\Delta_p' \text{ und } \Delta_p \in \langle p\Delta, (p+1)\Delta\rangle \tag{126}$$

$$S_{10}(j;\, p\Delta, \min((p+1)\Delta,\Delta^2)) =$$

$$= \pm\Delta \sum_{p\Delta\le n_1<(p+1)\Delta,\Delta^2} \left|\sin\frac{\pi n_1}{2j\Delta}\right|^j \cdot n_1^{-2} \cdot S_2(n_1) \tag{127}$$

$$\ll \Delta\Big|\sum_{p\Delta\le n_1\le\Delta_p'} n_1^{-2}\, S_2(n_1)\Big| \ll p^{-2}\Delta^{-1}\, S_1(p\Delta,\Delta_p).$$

IV. Wir wählen

$$\Delta := (x^{-1-21l}\, N^{5+81l})^{1/(5+71l+k)}. \tag{128}$$

Wegen (111) und (115) ist $x^{2/7} \le N \le x^{1/3}$ und wegen (1.20) $k \ge 0$ und $l \ge 1/2$. Daher gilt zunächst $x^{-1-21l}\, N^{5+81l} \ge x^{(3+21l)/7} \ge 1$, also wegen (128)

$$1 \le \Delta \le (x^{-1-21l}\, N^{5+81l})^{1/(5+71l)} =$$

$$= (x\, N^{-3})^{-\frac{1+21l}{5+71l}}\, N^{\frac{2+21l}{5+71l}} \le (x^{-2}\, N^{9})^{2/17}, \tag{129}$$

da die Funktionen $-\frac{1+21l}{5+71l}$ und $\frac{2+21l}{5+71l}$ monoton fallen und folglich bei $l = 1/2$ ihr Maximum annehmen. Aus (115) und (129) ergibt sich noch

$$1 \le \Delta \le x^{2/17}. \tag{130}$$

Wir wenden nun Satz 1 mit

$N_1 := 2^q$	bzw.	$N_1 := p\Delta$	
$N_1' := \beta_q$	bzw.	$N_1' := \Delta_p$	
$M_1 := 2^q$	bzw.	$M_1 := \Delta$	
auf $S_1(2^q,\beta_q)$	bzw.	$S_1(p\Delta,\Delta_p)$	an.

Wegen (123) und (130) ist in beiden Fällen (1) erfüllt. (2) folgt aus (124) bzw. (126). (3 - 4) ist mit (115) äquivalent, und (5) folgt aus (129) und $M_1 \le \Delta$ (im Falle $M_1 = 2^q$ vgl. (123)).

Daher gilt gemäß (8)

$$S_1(2^q,\beta_q) \ll 2^{qc_o}.2^{q(1-c_o)}(x^{1+2l}2^{q(1+l+k)}N^{-1-2l})^{1/(4+6l)} \tag{131}$$

bzw.

$$S_1(p\Delta,\Delta_p) \ll \Delta^{c_o}(p\Delta)^{1-c_o}(x^{1+2l}\Delta^{1+l+k}N^{-1-2l})^{1/(4+6l)}. \tag{132}$$

V. Setzt man (131) in (125) und das wiederum in (122) ein, so hat man für $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} S_{10}(j;1,\Delta) &\ll (x^{1+2l}N^{-1-2l})^{1/(4+6l)} \sum_{o\le q<ld\Delta} 2^{q(1+l+k)/(4+6l)} \\ &\ll (x^{1+2l}\Delta^{1+l+k}N^{-1-2l})^{1/(4+6l)}. \end{aligned} \tag{133}$$

Setzt man (132) in (127) und das in (121) ein, so hat man wegen (133) für $j = 1, 2$

$$S_{10}(j;1,\Delta^2) \ll (x^{1+2l}\Delta^{1+l+k}N^{-1-2l})^{1/(4+6l)}(1 + \sum_{1\le p<\Delta} p^{-1-c_o}). \tag{134}$$

Δ wurde in (128) so gewählt, daß

$$\frac{N}{\Delta} = (x^{1+2l}\Delta^{1+l+k}N^{-1-2l})^{1/(4+6l)}$$

gilt. Daher folgt aus (120), (128) und (134)

$$S(N,N') \ll \frac{N}{\Delta} = (x^{1+2l}N^{-1+k})^{1/(5+7l+k)}.$$

Hieraus ergibt sich wegen $\min(2^{q+1}\xi, x^{1/3}) \le 2\cdot 2^q\xi$ - vgl.(115) -

$$\begin{aligned} S(\xi,x^{1/3}) &= \sum_{q=0}^{\infty} S(2^q\xi, \min(2^{q+1}\xi, x^{1/3})) \\ &\ll (x^{1+2l}\xi^{-1+k})^{1/(5+7l+k)} \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q(1-k)/(5+7l+k)}, \end{aligned}$$

woraus wegen (112) und $k \ge 0$ die Behauptung (113) folgt.

Satz 3

Ist

$$t \geq 0, \tag{135}$$

und sind (κ,λ) und (k,l) "beliebige aber feste" Grundexponentenpaare mit

$$1/5 \leq \kappa < \lambda/2, \tag{136}$$

$$k < l \leq 2k, \tag{137}$$

$$\chi(\kappa,\lambda;k,l) := \frac{(1+\kappa)(1+2l) - \kappa\,(5+7l+k)}{(1+\kappa)(1-k) + (\lambda-2\kappa)(5+7l+k)} \geq \frac{2}{7}, \tag{138}$$

so gilt mit

$$\vartheta(\kappa,\lambda;k,l) := \frac{\kappa\,(1-k) + (\lambda-2\kappa)\,(1+2l)}{(1+\kappa)(1-k) + (\lambda-2\kappa)(5+7l+k)} \tag{139}$$

$$S(t,x^{1/3}) = \sum_{t<n\leq x^{1/3}} \psi(x/n^2) \ll x^{\vartheta(\kappa,\lambda;k,l)}. \tag{140}$$

Beweis:

Es sei

$$\xi_0 \geq x^{2/7}. \tag{141}$$

Mit der Abkürzung (1.30) zerlegen wir die Summe (140) wie folgt:

$$\begin{aligned} S(t,x^{1/3}) &= S(t,\ \min(\xi_0,x^{1/3})) + S(\max(t,\xi_0),\ x^{1/3}) \\ &= S(0,\ \min(\xi_0,x^{1/3})) - S(0,\ \min(t,\xi_0,x^{1/3})) \\ &\quad + S(\max(t,\xi_0),\ x^{1/3}). \end{aligned} \tag{142}$$

Wegen (135 - 136), $\xi_0 \geq 0$ und Hilfssatz 8 sind sowohl mit $\xi := \min(\xi_0,x^{1/3})$ als auch mit $\xi := \min(t,\xi_0,x^{1/3})$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 12 erfüllt, und es folgt aus $\min(t,\xi_0,x^{1/3}) \leq \min(\xi_0,x^{1/3}) \leq \xi_0$

$$S(0,\min(\xi_0,x^{1/3})) - S(0,\min(t,\xi_0,x^{1/3})) \ll (x^{\kappa}\,\xi_0^{\lambda-2\kappa})^{1/(1+\kappa)}, \tag{143}$$

da die rechte Seite der Behauptung (1.31) monoton mit ξ wächst.

Wegen (137) und (141) sind mit $\xi := \max(t,\xi_0) \geq \xi_0$ die

Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt, und es folgt

$$S(\max(t,\xi_0),\ x^{1/3}) \ll (x^{1+2l}\,\xi_0^{-l+k})^{1/(5+7l+k)}, \tag{144}$$

da die rechte Seite der Behauptung (113) monoton mit ξ fällt.

Wir wählen nun ξ_0 so, daß die rechten Seiten in (143) und (144) übereinstimmen, daß also

$$\xi_0^{(l-k)/(5+7l+k)} + (\lambda-2\kappa)/(1+\kappa) = x^{(1+2l)/(5+7l+k)} - \kappa/(1+\kappa) \tag{145}$$

gilt. Diese Wahl ist wegen (138) mit (141) verträglich, denn aus (145) folgt $\xi_0 = x^{\chi(\kappa,\lambda;k,l)}$. Daher ergibt (142 - 144)

$$S(t,x^{1/3}) \ll x^{(\kappa\,+\,\chi(\kappa,\lambda;k,l)(\lambda-2\kappa))/(1+\kappa)}. \tag{146}$$

Setzt man $\chi(\kappa,\lambda;k,l)$ ein, so hat man für den Exponenten der rechten Seite zunächst

$$\frac{\kappa\{(1+\kappa)(l-k) + (\lambda-2\kappa)(5+7l+k)\} + (\lambda-2\kappa)\{(1+\kappa)(1+2l) - \kappa(5+7l+k)\}}{(1+\kappa)\{(1+\kappa)(l-k) + (\lambda-2\kappa)(5+7l+k)\}}.$$

Hebt man im Zähler die beiden den Faktor $(5+7l+k)$ enthaltenden Summanden heraus und kürzt durch $(1+\kappa)$, so erhält man die rechte Seite von (139), und aus (146) folgt die Behauptung (140).

Setzt man in Satz 3 - vgl. Definition 2, (1.26) und (1.28) -

$$(\kappa,\lambda) := \mathrm{BABA}(1/6,\ 2/3) = \mathrm{BA}(2/7,\ 4/7) = (4/18,\ 11/18),$$

$$(k,l) := \mathrm{BA}^2\mathrm{BA}(1/6,\ 2/3) = \mathrm{BA}(2/18,\ 13/18) = (13/40,\ 22/40),$$

so wird

$$\chi(\kappa,\lambda;k,l) = \frac{(18+4)(40+44) - 4(200+154+13)}{22(22-13) + (11-8)\cdot 367}$$

$$= \frac{1848 - 1468}{198 + 1101} = \frac{380}{1299} > \frac{38}{130} > \frac{2}{7},$$

und die Voraussetzungen (135 - 138) sind offenbar erfüllt. Wegen

$$\vartheta(\kappa,\lambda;k,l) = \frac{4\cdot 9 + 3\cdot 84}{1299} = \frac{4\cdot 3 + 84}{433} = \frac{96}{433}$$

folgt dann für $t \geq 0$

$$\sum_{t<n\leq x^{1/3}} \psi(x/n^2) \ll x^{96/433}. \tag{147}$$

Es ist $96/433 < 0{,}22171$, (147) also eine Verbesserung des in der Einleitung genannten Rankinschen Ergebnisses.

Ohne Beweis [1]) sei vermerkt:

Ist $\mathfrak{M}$ die Menge aller Grundexponentenpaare, und

$$\vartheta_0 := \inf_{\substack{(\kappa,\lambda)\in\mathfrak{M} \\ (k,l)\in\mathfrak{M} \\ 1/5\leq\kappa<\lambda/2 \\ k<l\leq 2k \\ \chi(\kappa,\lambda;k,l)\geq 2/7}} \vartheta(\kappa,\lambda;k,l),$$

so gilt

1) $\vartheta_0 = \inf_{\substack{(\kappa,\lambda)\in\mathfrak{M} \\ (k,l)\in\mathfrak{M}}} \vartheta(\kappa,\lambda;k,l)$,

die Voraussetzungen (135 - 138) unseres Satzes 3 sind also für die "interessanten" Grundexponentenpaare erfüllt,

2) $0{,}2215\,8522 < \vartheta_0 < 0{,}2215\,8525.$ (148)

Für [2])

$$(\kappa,\lambda) := (BA)^2(BA^2)^2BA(1/6,\ 2/3) = (194/758,\ 445/758),$$

$$(k,l) := (BA^2)^2(BA)^2BA^2(1/6,\ 2/3) = (1029/3278,\ 1820/3278)$$

sind die Voraussetzungen (135 - 138) unseres Satzes 3 ebenfalls erfüllt [3]), und es gilt mit

$$\vartheta_1 := \vartheta(\kappa,\lambda;k,l) = \frac{109\,556}{494\,419} < 0{,}2215\,8534$$ der

---

[1]) Wir werden in einer späteren Arbeit auf Fragen dieser Art zurückkommen.

[2]) Der Leser möge entschuldigen, daß die folgenden numerischen Rechnungen nicht vorgeführt werden. Ist er nicht geneigt sie nachzuprüfen, so setze er - vgl.(147) - $\vartheta_1 := 96/433$.

[3]) $\chi(\kappa,\lambda;k,l) = \frac{147\,018}{494\,419} > \frac{2}{7}$.

Hauptsatz

Für $t \geq 0$ ist

$$S(t,x^{1/3}) = \sum_{t<n\leq x^{1/3}} \psi(x/n^2) \ll x^{\vartheta_1}.$$

ϑ_1 stimmt mit dem "siebenstelligen" Ergebnis (148) in sechs Dezimalen überein.

§ 3. Zahlentheoretische Anwendungen

Aus Hilfssatz 11 und unserem Hauptsatz folgt wegen $9/41 < \vartheta_1$:

Satz 4 ("quadratisches Teilerproblem")

$$\sum_{1\le q\le x}\sum_{n^2\mid q} 1 = \sum\sum_{mn^2\le x} 1 = \zeta(2)x + \zeta(1/2)x^{1/2} + O(x^{\vartheta_1}).$$

Ersetzt man den Satz 3 der Richertschen Arbeit [5] durch unseren Satz 4 und im Beweise von [5], Lemma 10, $v = x^{7/30}\log^{-3/10}x$ durch $v = x^{(1-\vartheta_1)/(4-3\vartheta_1)}$, so erhält man statt [5], Satz 4,

Satz 5

Bezeichnet $a(n)$ die Anzahl der wesentlich verschiedenen abelschen Gruppen der Ordnung n, so gilt für die summatorische Funktion

$$\sum_{1\le n\le x} a(n) = k_1x + k_2x^{1/2} + k_3x^{1/3} + O(x^{1/(4-3\vartheta_1)}) \quad ^{1})$$

mit $k_\mu = \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{\infty} \zeta(\nu/\mu) \quad (\mu = 1,2,3).$

Es ist $1/(4-3\vartheta_1) < 0,\ 2998\ 2814$ [2]).

Satz 6

Ist

$$0 < t \le x^{1/3} \quad \text{und} \quad 0 < h \le x^{2/3}, \tag{1}$$

so gilt

$$D_h(x,t) := \sum_{\substack{x<mn^2\le x+h\\ n>t}}\sum 1 \ll x^{\vartheta_1} + ht^{-1}. \tag{2}$$

---

1) Vgl. auch die Schlußbemerkungen in [5].

2) Rankin, [4], 4. (V), kommt auf 0, 2999 3519...

Beweis:

Zunächst gilt

$$D_h(x,t) \ll \sum_{\substack{x<mn^2\le x+h \\ t<n\le (x+h)^{1/3}}} \sum 1 + \sum_{\substack{x<mn^2\le x+h \\ 1\le m\le (x+h)^{1/3}}} \sum 1$$

$$= \sum_{t<n\le (x+h)^{1/3}} \left(\left[\frac{x+h}{n^2}\right] - \left[\frac{x}{n^2}\right]\right) + \sum_{1\le m\le (x+h)^{1/3}} \left(\left[\sqrt{\frac{x+h}{m}}\right] - \left[\sqrt{\frac{x}{m}}\right]\right)$$

$$= \sum_{t<n\le (x+h)^{1/3}} \left(-\psi\left(\frac{x+h}{n^2}\right) + \psi\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{h}{n^2}\right)$$

$$+ \sum_{1\le n\le (x+h)^{1/3}} \left(-\psi\left(\sqrt{\frac{x+h}{n}}\right) + \psi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right) + \sqrt{\frac{x+h}{n}} - \sqrt{\frac{x}{n}}\right). \tag{3}$$

Nun ist wegen $|\psi| \le 1/2$ und (1)

$$\left| \sum_{x^{1/3}<n\le (x+h)^{1/3}} \psi \right| \le \tfrac{1}{2}((x+h)^{1/3} - x^{1/3} + 1) < \tfrac{1}{2}(hx^{-2/3} + 1) \le 1, \tag{4}$$

$$\sum_{t<n\le (x+h)^{1/3}} hn^{-2} \ll ht^{-1}, \tag{5}$$

$$\sum_{1\le n\le (x+h)^{1/3}} \left(\sqrt{\frac{x+h}{n}} - \sqrt{\frac{x}{n}}\right) \le ((x+h)^{1/2} - x^{1/2}) \sum_{1\le n\le (2x)^{1/3}} n^{-1/2}$$

$$\ll hx^{-1/2} \cdot (x^{1/3})^{1/2} = hx^{-1/3} \le ht^{-1}. \tag{6}$$

(3 - 6) liefert

$$D_h(x,t) \ll \left| \sum_{t<n\le (x+h)^{1/3}} \psi((x+h)/n^2) \right| + \left| \sum_{t<n\le x^{1/3}} \psi(x/n^2) \right|$$

$$+ \left| \sum_{1\le n\le (x+h)^{1/3}} \psi(\sqrt{(x+h)/n}) \right| + \left| \sum_{1\le n\le x^{1/3}} \psi(\sqrt{x/n}) \right|$$

$$+ ht^{-1} + 1,$$

so daß wegen $1 \le x < x+h \le 2x$ die Behauptung (2) aus Hilfssatz 10 und unserem Hauptsatz folgt.

Ist $Q(x)$ die Anzahl quadratfreier Zahlen im Abschnitt $1 \le n \le x$, so gilt bekanntlich - vgl. [7] -

$$Q(x) = \sum_{1\le q\le x} \mu^2(q) = \sum_{1\le q\le x} \sum_{n^2\mid q} \mu(n) = \sum\sum_{mn^2\le x} \mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right]. \qquad (7)$$

Daher ist für $0 < h \le x^{2/3}$ laut Satz 6

$$\Delta_h Q(x) := Q(x+h) - Q(x) =$$

$$= \sum_{n\le h^{1/2}} \mu(n)\left(\left[\frac{x+h}{n^2}\right] - \left[\frac{x}{n^2}\right]\right) + \sum_{\substack{x<mn^2\le x+h \\ n>h^{1/2}}}\sum \mu(n) =$$

$$= \sum_{n\le h^{1/2}} \mu(n)(hn^{-2} + O(1)) + O(D_h(x,h^{1/2}))$$

$$= h\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\cdot n^{-2} + O(h^{1/2}) + O(x^{\vartheta_1}),$$

oder mit geeignetem C, wenn $K := \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\cdot n^{-2}$ bedeutet,

$$|\Delta_h Q(x) - Kh| < C(x^{\vartheta_1} + h^{1/2}). \qquad (8)$$

Für alle hinreichend großen x, etwa $x \ge n_o$, ist wegen $0 < \vartheta_1 < 2/3$ sowohl $h := \frac{2}{K}\cdot Cx^{\vartheta_1} \le x^{2/3}$ als auch $h^{1/2} \le x^{\vartheta_1}$.

Daher liefert (8) $|\Delta_h Q(x) - 2Cx^{\vartheta_1}| < 2Cx^{\vartheta_1}$, woraus

$$\Delta_h Q(x) > 0 \qquad (9)$$

folgt. Es sei nun $n \ge n_o$. Dann ist auch die n^{te} quadratfreie Zahl $s_n \ge n_o$. Setzen wir $x := s_n$, so besagt (9), daß s_{n+1} im Intervall $(s_n, s_n+h\rangle$ liegen muß, daß also

$$s_{n+1} - s_n \le h \ll s_n^{\vartheta_1} \qquad (10)$$

gilt. Aus (7) folgt aber $n = Q(s_n) > s_n(1 - \sum_{m=2}^{\infty} m^{-2}) > \frac{1}{3}s_n$, und daher aus (10)

Satz 7

Ist s_n die n^{te} quadratfreie Zahl, so gilt für hinreichend große n

$$s_{n+1} - s_n \ll n^{\vartheta_1}.$$

Literaturverzeichnis

[1] J.G. van der Corput: Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem, Math. Annalen 87 (1922), S. 39 - 65.

[2] A. Kneser: Beiträge zur Theorie der Sturm-Lionvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen, Math. Annalen 60 (1905), S. 402 - 423.

[3] E. Phillips: The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method, Quart. J. of Math. (Oxford) 4 (1933), S. 209 - 225.

[4] R.A. Rankin: Van der Corput's method and the theory of exponent-pairs, Quart. J. of Math. (Oxford) (2) 6 (1955), S. 147 - 153.

[5] H.E. Richert: Über die Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung I, Math. Z. 56 (1952), S. 21 - 32.

[6] H.E. Richert: Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem, Math. Z. 58 (1953), S. 204 - 218.

[7] H.E. Richert: On the difference between consecutive square free numbers, J. London Math. Soc. 29 (1954), S. 16 - 20.

[8] E.C. Titchmarsh: The theory of the Riemann zeta-function, Oxford (1951).

Lebenslauf

Ich, Peter Georg Schmidt, wurde am 7. Mai 1930 als deutscher Staatsangehöriger und Sohn des Graphikers Heinrich Schmidt und seiner Ehefrau Margarete, geb. Fisy, in Duisburg geboren. Meine Konfession ist römisch-katholisch. Von 1940 - 51 besuchte ich, von einigen Unterbrechungen während des Krieges abgesehen, die Gymnasien zu Duisburg - Ruhrort und Duisburg - Meiderich und bestand im Frühjahr 1951 die Reifeprüfung.

Anschließend studierte ich an der Göttinger Universität Mathematik und Physik. Differential- und Integralrechnung hörte ich bei Professor Schneider, Analytische Geometrie, Differentialgeometrie, Algebra und Funktionentheorie bei Professor Lyra, eine weiterführende Vorlesung über Funktionentheorie bei Professor Siegel, Differentialgleichungen bei Professor Stöhr, Partielle Differentialgleichungen bei Professor Stellmacher, Vorlesungen über Uniformisierung und Elliptische Differentialgleichungen bei Professor Heinz und Zahlentheorie bei Professor Deuring. Bei den Professoren Becker, Tollmien und v. Weizsäcker hörte ich Vorlesungen über Theoretische Physik: Elektrodynamik, Angewandte Mechanik, Strömungslehre und Relativitätstheorie. Experimentalphysik hörte ich bei Professor Pohl. Ich beteiligte mich ferner an einem Proseminar über "das Lebesguesche Integral" unter der Leitung von Professor Schneider und nach dem Vordiplom an zwei weiteren Seminaren über "Fragen der Eigenwerttheorie" und "Geometrie in verallgemeinerten Räumen" unter der Leitung der Professoren Rellich und Lyra. Am 13. November 1957 bestand ich in Göttingen die Diplomprüfung.

Nach meinem Diplomexamen ging ich zu Professor Strubecker an die Technische Hochschule Karlsruhe. Im Herbst 1959 erhielt ich dort eine Assistentenstelle, die ich bis zum Herbst 1963 innehatte. Während des Sommersemesters 1960 war ich Assistent am "Institut National des Sciences Appliquées" in Lyon - Villeurbanne. Seit Oktober 1963 bin ich Assistent von Professor Richert in Marburg. Ihm danke ich die Anregung zu vorliegender Arbeit.

Seit 1958 bin ich mit Hildegard Sauren aus Düren verheiratet. Dieser Ehe entstammen drei Kinder.